

Maturalna otwarta pracownia

25.09.2024r

Przekształcenia wykresów funkcji

Symetria względem Ox

1. Naszkicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1 , oraz f_2 , jeśli:

1.1. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -x^2$

1.2. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = -\sqrt{x}$

1.3. $f_1(x) = \frac{4}{x}$, $f_2(x) = -\frac{4}{x}$

1.4. $f_1(x) = 2x - 4$, $f_2(x) = -2x + 4$

1.5. $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = -x^3$

1.6. $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = -|x|$

1.7. $f_1(x) = x - 3$, $f_2(x) = 3 - x$

1.8. $f_1(x) = [x]$, $f_2(x) = -[x]$

1.9. $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = -2^x$

1.10. $f_1(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $f_2(x) = -\left(\frac{1}{4}\right)^x$

1.11. $f_1(x) = \log_2 x$, $f_2(x) = -\log_2 x$

1.12. $f_1(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $f_2(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x$

Symetria względem Oy

2. Naszkicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1 , oraz f_2 , jeśli:

2.1. $f_1(x) = x - 2$, $f_2(x) = -x - 2$

2.2. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (-x)^2$

2.3. $f_1(x) = \frac{4}{x}$, $f_2(x) = -\frac{4}{x}$

2.4. $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = (-x)^3$

2.5. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{-x}$

2.6. $f_1(x) = 2x + 4$, $f_2(x) = -2x + 4$

2.7. $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = |-x|$

2.8. $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = 2(-x)$

2.9. $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{-x}$

2.10. $f_1(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $f_2(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$

2.11. $f_1(x) = \log_2 x$, $f_2(x) = \log_2(-x)$

2.12. $f_1(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $f_2(x) = \log_{\frac{1}{3}} -x$

Translacja o wektor

3. Wykres funkcji f_2 powstaje poprzez translację o wektor \vec{u} wykresu funkcji f_1 . Zapisz wzór funkcji f_2 , następnie naszkicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1 , oraz f_2 , jeśli:

3.1. $f_1(x) = x^2$, $\vec{u} = [4, -1]$

3.2. $f_1(x) = x^2$, $\vec{u} = [2, -4]$

3.3. $f_1(x) = 2x$, $\vec{u} = [2, 4]$

3.4. $f_1(x) = 2x$, $\vec{u} = [1, -2]$

3.5. $f_1(x) = \frac{2}{x}$, $\vec{u} = [-1, -2]$

3.6. $f_1(x) = \frac{4}{x}$, $\vec{u} = [2, 3]$

3.7. $f_1(x) = 2^x$, $\vec{u} = [-1, -2]$

3.8. $f_1(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $\vec{u} = [2, -3]$

4. Wykres funkcji f_2 powstaje poprzez translację o wektor \vec{u} wykresu funkcji f_1 . Zapisz współrzędne wektora \vec{u} , następnie naszkicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1 , oraz f_2 , jeśli:

- 4.1. $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = 2x - 4$ 4.5. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{x-4} - 2$
 4.2. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (x-1)^2 - 4$ 4.6. $f_1(x) = \sqrt{2x}$, $f_2(x) = \sqrt{2x+4} - 1$
 4.3. $f_1(x) = \frac{4}{x}$, $f_2(x) = \frac{4}{x-1} + 2$ 4.7. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (x+3)^2 + 3$
 4.4. $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = (x+2)^3 + 1$ 4.8. $f_1(x) = \frac{2}{x}$, $f_2(x) = \frac{2}{x+1} - 4$

Symetria częściowa Ox

5. Naskicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1 , oraz f_2 , jeśli:

- 5.1. $f_1(x) = x^2 - 4$, $f_2(x) = |x^2 - 4|$ 5.5. $f_1(x) = 2^{x+3} - 4$, $f_2(x) = |2^{x+3} - 4|$
 5.2. $f_1(x) = 2x - 4$, $f_2(x) = |2x - 4|$ 5.6. $f_1(x) = \log_2(x+4) + 2$, $f_2(x) = |\log_2(x+4) + 2|$
 5.3. $f_1(x) = \sqrt{x-2} - 2$, $f_2(x) = |\sqrt{x-2} - 2|$ 5.7. $f_1(x) = x^3 + 1$, $f_2(x) = |x^3 + 1|$
 5.4. $f_1(x) = \frac{4}{x-2} + 2$, $f_2(x) = \left| \frac{4}{x-2} + 2 \right|$ 5.8. $f_1(x) = 3^x + 2$, $f_2(x) = |3^x + 2|$

Symetria częściowa Oy

6. Naskicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1 , oraz f_2 , jeśli:

- 6.1. $f_1(x) = 2x - 4$, $f_2(x) = 2|x| - 4$ 6.5. $f_1(x) = \sqrt{x-3} - 2$, $f_2(x) = \sqrt{|x|-3} - 2$
 6.2. $f_1(x) = \sqrt{x+2} + 1$, $f_2(x) = \sqrt{|x|+2} + 1$ 6.6. $f_1(x) = \log_2(x-1) - 2$, $f_2(x) = \log_2(|x|-1) - 2$
 6.3. $f_1(x) = \frac{3}{x+1} + 2$, $f_2(x) = \frac{3}{|x|+1} + 2$ 6.7. $f_1(x) = x^3 - 1$, $f_2(x) = |x|^3 - 1$
 6.4. $f_1(x) = 4^{x-1} - 2$, $f_2(x) = 4^{|x|-1} - 2$ 6.8. $f_1(x) = \frac{-2}{x-2} - 2$, $f_2(x) = \frac{-2}{|x|-2} - 2$

Powinowactwo prostokątne o osi Ox

7. Naskicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1 , oraz f_2 , jeśli:

- 7.1. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = 2\sqrt{x}$ 7.5. $f_1(x) = 2^{x-1} - 1$, $f_2(x) = 2(2^{x-1} - 1)$
 7.2. $f_1(x) = x - 2$, $f_2(x) = -2(x - 2)$ 7.6. $f_1(x) = x - 3$, $f_2(x) = 6 - 2x$
 7.3. $f_1(x) = \frac{1}{x-2} + 1$, $f_2(x) = \frac{2}{x-2} + 2$ 7.7. $f_1(x) = |x-1| - 1$, $f_2(x) = 2|x-1| - 2$
 7.4. $f_1(x) = x^2 - 1$, $f_2(x) = -2(x^2 - 1)$ 7.8. $f_1(x) = \sqrt{x-2} - 2$, $f_2(x) = -2\sqrt{x-2} + 4$

Powinowactwo prostokątne o osi Oy

8. Naskicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1 , oraz f_2 , jeśli:

- 8.1. $f_1(x) = x - 2$, $f_2(x) = 2x - 4$ 8.5. $f_1(x) = x^2 - 4$, $f_2(x) = 4x^2 - 4$
 8.2. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{2x}$ 8.6. $f_1(x) = 2^{x-2} - 2$, $f_2(x) = 2^{2x-2} - 2$
 8.3. $f_1(x) = x - 3$, $f_2(x) = -3x - 3$ 8.7. $f_1(x) = \sqrt{x+4} - 2$, $f_2(x) = \sqrt{-2x+4} - 2$
 8.4. $f_1(x) = \frac{3}{x} - 1$, $f_2(x) = \frac{1}{x} - 1$ 8.8. $f_1(x) = (x-4)^2 - 9$, $f_2(x) = (2x-4)^2 - 9$

Złożenie przekształceń

9. Wykres funkcji f_2 powstał w wyniku przekształceń wykresu funkcji f_1 . Zapisz ciąg przekształceń, sporządź szkic funkcji f_2 jeśli:

9.1. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = |x+2| - 1$

9.2. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -(x-2)^2 + 4$

9.3. $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \left| \frac{2}{x+2} - 2 \right|$

9.4. $f_1(x) = 3^x$, $f_2(x) = 3^{x-2} - 3$

9.5. $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = -2^{1-x} + 1$

9.6. $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = |2^{x-3} - 4|$

9.7. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = |\sqrt{x-2} - 4|$

9.8. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = |(|x|+3)^2 - 1|$

9.9. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = |2 - |x-4||$

9.10. $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{|x-2|} + 1$

9.11. $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \left| \frac{2}{1-|x-2|} - 3 \right|$

9.12. $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \frac{3}{1-|x+2|} + 3$

9.13. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \left| -\sqrt{2-|x|} + 3 \right|$

9.14. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = |1 - \sqrt{-x}|$

9.15. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{|2x-3|} - 2$

9.16. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (|x|-3)^2 - 2$

9.17. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{|x|-1}$

9.18. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = |4 - 2(x-1)^2| - 3$

9.19. $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \frac{2}{|x|-1}$

9.20. $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \left| \frac{1}{x-1} - 2 \right|$

02.10.2024r

1. Rozwiąż nierówność $|x^2 - 5x - 6| + |x - 6| \geq 2|12 - 2x|$.
2. Rozwiąż nierówność $|2x^2 + 7x - 11| < x^2 + x + 3$
3. Rozwiąż nierówność $\sqrt{(x^2 - |x| - 2)^2} > 2$.
4. Wykaż, że dla $x > 0$ prawdziwa jest nierówność $20x^2 + 2x + 5 \geq 22x$.
5. Wykaż, że liczba $\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ jest całkowita.
6. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ liczba $x = 5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ jest podzielna przez 19.
7. Wykaż, za pomocą indukcji matematycznej, równość

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

8. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^3 + 5n$ jest podzielna przez 6.
9. Wykaż, że dla dowolnej liczby pierwszej $p, p > 5$ liczba $p^2 + 11$ jest podzielna przez 12.
10. Dla jakich wartości parametru $m, m \in \mathbb{R}$ równanie $x^2 - |2x - 8| = m$ ma dwa pierwiastki różnych znaków?

09.10.2024r

11. Wyznacz wszystkie wartości parametru $m, m \in \mathbb{R}$, dla których funkcja

$$f(x) = (m^2 - 9)x^2 - 2(m - 3)x - 3$$

przyjmuje wartości ujemne dla każdej liczby rzeczywistej x .

12. Wyznacz wszystkie wartości parametru $m, m \in \mathbb{R}$, dla których funkcja

$$f(x) = x^2 + (2m + 3)x + m^2 + 3m$$

będzie miała dwa różne miejsca zerowe, z których jedno będzie mniejsze od 2, zaś drugie większe od $\frac{7}{3}$.

13. Ustal, dla jakich wartości parametru $m, m \in \mathbb{R}$ równanie $x^2 + 2(m + 1)x + m + 2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 takie, że $|x_1| + |x_2| < 2\sqrt{11}$.
14. Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ dla których zbiór rozwiązań nierówności

$$|x^2 - 4x + 3| \leq x - m$$

jest jednoelementowy.

15. Wyznacz wszystkie wartości rzeczywistego parametru m , dla których zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x - m^2 - 2m + 1}{m^2 - 2 - x} > 0$ jest przedział $(2; 7)$.
16. Dla jakich wartości parametru m równanie $2x^2 - (m - 1)x + m + 1 = 0$ ma różne pierwiastki rzeczywiste spełniające warunek $|x_2 - x_1| = 1$?
17. Rozwiąż równanie $\sqrt{x + 3} - 4\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 8} - 6\sqrt{x - 1} = 1$.
18. Rozwiąż nierówność $|x - 2| - |x - 1| \leq |x + 1| - 5$
19. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n , liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.
20. Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ rozwiązanie (x, y) układu równań

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + my = 2m \end{cases}$$

należy do I ćwiartki układu współrzędnych?

16.10.2024r

21. Dane jest równanie $(2m-1)x^2-2x+m=0$, gdzie $m \in \mathbb{R}$. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste których suma odwrotności jest równa $\frac{2}{3}m$?
22. Rozwiąż nierówność $|2x+2|+|x-2|>5$.
23. Ustal, dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ dwa różne pierwiastki x_1, x_2 równania

$$x^2 - 4(m+1)x + 2m^2 - 2m = 0$$

spełniają warunek $x_1 < m < x_2$.

24. Wykaż, że dla dowolnej liczby $m \in \mathbb{Z}$, wartość wyrażenia $m^6 - 2m^4 + m^2$ jest liczbą podzielną przez 36.
25. Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 19$ jest podzielne przez 16.
26. Znaleźć maksimum funkcji $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji f .
27. Udowodnij, że wielomian $W(x) = x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 2$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.
28. Wyznacz wartość parametrów a, b tak, aby wielomian $x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + b$ był podzielny przez $x^2 - 1$. Dla wyznaczonych wartości parametrów oblicz wszystkie pierwiastki tego wielomianu.
29. Wykresy funkcji kwadratowych $f(x) = 3x^2 - 2mx - m$, oraz $g(x) = mx^2 + x + 3$, dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ przecinają się w dwóch punktach. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których iloraz sumy odciętych tych punktów przez ich iloczyn jest o $\frac{1}{8}$ mniejszy od największej wartości funkcji g .
30. Wykaż, że jeśli $mp = 2(n+q)$ to chociaż jedno z równań $x^2 + mx + n = 0$, $x^2 + px + q = 0$ ma rozwiązanie.

23.10.2024r

31. [4 pkt] Rozwiąż nierówność $|2x - 5| - |x + 4| \leq 2 - 2x$.
32. [3 pkt] Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których równanie

$$|x - 4| = (a - 1)^2 - 5$$

ma dwa rozwiązania różnych znaków.

33. [4 pkt] Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których jedynym rozwiązaniem rzeczywistym równania $x^3 + m^3x^2 - m^2x - 1 = 0$ jest liczba 1.
34. [5 pkt] Pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 2x^3 - (3m - 1)x^2 + 7x - m$ jest liczba -1 . Wyznacz wartość parametru m oraz pozostałe pierwiastki tego wielomianu. Rozwiąż nierówność $W(x) < 0$.
35. [3 pkt] Przedstaw wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych i takich, że współczynniki przy drugich potęgach są równe jeden.
36. [4 pkt] Reszta z dzielenia wielomianu

$$W(x) = 4x^3 - 6x^2 - (5m + 1)x - 2m$$

przez dwumian $x + 2$ jest równa (-30) . Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$.

37. [5 pkt] Sporządź wykres funkcji $f(x) = |x^2 - 2x - 8|$, a następnie korzystając z tego wykresu, wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których równanie $f(x) = k$, ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą ujemną.
38. [3 pkt] Rozwiąż nierówność:

$$\frac{2x + 1}{-x} \leq \frac{4 + 2x}{5x + 5}.$$

39. [4 pkt] Wyznacz całkowite wartości parametru a , dla których równanie

$$(a - 1)x^2 - (a^2 + 1)x + a^2 + a = 0$$

ma pierwiastki całkowite.

40. [4 pkt] Dla jakich całkowitych wartości parametrów a, b liczba $1 + \sqrt{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu $3x^3 + ax^2 + bx + 12$.
41. [3 pkt] Wykaż, że kwadrat liczby niepodzielnej przez 3 daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3.
42. [3 pkt] Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k i każdej liczby całkowitej m liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 6.
43. Liczby x_1 oraz x_2 są różnymi pierwiastkami równania kwadratowego $(m - 2)x^2 - 2x + 1 = 0$. Narysuj wykres funkcji $f(m) = |x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2|$.

30.10.2024r

44. [3 pkt] Ustal dla jakich wartości całkowitych liczby x , wyrażenie $\frac{x^3-2x+6}{x-2}$ osiąga wartość całkowitą.
45. [4 pkt] Dla jakich wartości parametru m liczba 1 zawiera się między różnymi pierwiastkami równania $(m-5)x^2-4mx+m-2=0$?
46. [5 pkt] Wyznacz wszystkie liczby $m \in \mathbb{R}$, dla których równanie $x^2+mx+(2m+1)=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2 takie, że $x_1^3+x_2^3=26$.
47. [4 pkt] Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^3+(m-1)x-m=0$$

- ma dokładnie dwa pierwiastki rzeczywiste. Dla otrzymanych wartości m wyznacz te pierwiastki.
48. [4 pkt] Dla jakich wartości parametru m równanie $mx^2+2x+m-2=0$ ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 1?
49. [5 pkt] Sporządź wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{x-4}{x-2} \right|$, a następnie korzystając z tego wykresu, wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których równanie $\left| \frac{x-4}{x-2} \right| = k$, ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą ujemną.
50. [4 pkt] Rozwiąż nierówność

$$\frac{2x-7}{5-2x} \leq \frac{3-x}{2x+1}$$

51. [4 pkt] Wykaż, że równanie $2x^3-3x^2-5=0$ ma w przedziale $(2;3)$ dokładnie jedno rozwiązanie.
52. [4 pkt] Rozwiąż nierówność $|x-|4-x|| \leq 5$.
53. [5 pkt] Wykaż, bez użycia kalkulatora i tablic, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą.
54. [3 pkt] Udowodnij, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 36.
55. [3 pkt] Wykaż, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ to $x^4+y^4+x^2+y^2 \geq 2(x^3+y^3)$
56. [4 pkt] Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k i każdej liczby całkowitej m liczba

$$k^5m - km^5$$

- jest podzielna przez 10.
57. [3 pkt] Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x-1)$ otrzymano resztę -3 , przy dzieleniu przez dwumian $(x-2)$ resztę 6, zaś przy dzieleniu przez dwumian $(x+3)$ resztę 1. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = x^3-7x+6$.

06.11.2024r

58. [4p] Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez dwumian $(x-1)$ daje resztę równą 7. Liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = x^2 - 1$.
59. [2 pkt] Oblicz granicę
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+2} - \frac{(n+2)^2}{n+444} \right).$$
60. [4p] Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez dwumiany $(x-2)$, $(x-1)$, $(x+1)$ daje reszty odpowiednio równe 2, 4, -6 . Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x) = (x-2)(x-1)(x+1)$.
61. [4p] Dla jakich wartości parametru m równanie $2x^2 - (m-1)x + m + 1 = 0$ ma różne pierwiastki rzeczywiste spełniające warunek $|x_2 - x_1| = 1$?
62. [4p] Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Suma wyrazów skrajnych wynosi 36, zaś środkowych 24. Wyznacz ten ciąg.
63. [3p] Iloraz ciągu geometrycznego wynosi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Wykaż, że każdy wyraz tego ciągu (z wyjątkiem wyrazu pierwszego) jest różnicą wyrazów: następnego i poprzedniego.
64. [4p] Suma S_n , n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa sumie S_m , m początkowych wyrazów tego ciągu. Wykaż, że $S_{m+n} = 0$.
65. [5p] Wykaż, że nie istnieje liczba a , dla której wielomian $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ jest podzielny przez $(x-a)^2$.
66. [4 pkt] Czterowyzrazowy ciąg (a, b, c, d) jest rosnący i arytmetyczny. Suma kwadratów trzech najmniejszych wyrazów tego ciągu jest pięciokrotnie większa od kwadratu czwartego wyrazu. Ponadto ciąg $(a-10, b, c)$ jest geometryczny. Oblicz wyrazy ciągu (a, b, c, d) .
67. [4p] Udowodnij, że jeżeli liczba całkowita n nie jest podzielna przez 3, to wyrażenie $n^4 - 17n^2 + 7$ jest podzielne przez 9.
68. [4p] Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^3 + 5n$ jest podzielna przez 6.
69. [3p] Wykaż, że liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ nie mogą być wyrazami jednego ciągu arytmetycznego (niekoniecznie kolejnymi).

13.11.2024r

70. [4p] Rozwiąż nierówność $|x-3|-|1-x|>2-x$
71. [4p] Dla jakich wartości parametru r , rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} 2x-y=-3-r \\ x-y=-1+r \end{cases}$$

spełnia warunek $|x|+|y|>2-r$?

72. [5p] Dla jakich wartości parametru k oba pierwiastki równania

$$x^2+(2k+6)x+4k+12=0$$

są większe od -1 ?

73. [5p] Dla jakich wartości parametru m równanie

$$x^2-(2m-1)x+m^2-4=0$$

ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 4 ?

74. [3p] Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)=x^2-4$ jest równa $R(x)=7x-2$. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x+2)$.
75. [4p] Wykaż, że równanie $x^3+(1+4m)x^2+(m^2+4m-1)x+m^2-1=0$ ma co najmniej jeden pierwiastek całkowity dla każdej wartości rzeczywistego parametru m .
76. [4p] Liczba 3 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu W określonego wzorem

$$W(x)=x^4-3x^3+ax^2+bx-18.$$

Znajdź pozostałe pierwiastki wielomianu. Rozwiąż nierówność $W(x)\geq 0$.

77. [3p] Wykaż, że wielomian $W(x)=x^4-2x^3+2x^2-8x+17$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.
78. [3p] Funkcja $f(x)=\frac{ax+b}{x+d}$ rośnie w każdym z przedziałów: $(-\infty, -2)$, oraz $(-2, +\infty)$, zaś jej zbiorem wartości jest $\mathbb{R}\setminus\{4\}$. Wyznacz współczynniki a, b, d , wiedząc, że wykres funkcji f przechodzi przez punkty $P(6, 3)$.
79. [4p] Rozwiąż nierówność $\frac{x^2+4x-1}{x+2}<x+3$.
80. [4p] Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym takim, że dla każdego $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ i każdego $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ prawdziwa jest proporcja:

$$\frac{S_m}{S_k}=\frac{m^2}{k^2}.$$

Udowodnij, że $\frac{am}{a_k}=\frac{2m-1}{2k-1}$.

81. [4p] Liczby a, b, c, d są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego, zaś liczby $a+5, b+6, c+9, d+16$ są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego. Znajdź te liczby.

20.11.2024r

82. [3p] W trójkąt równoboczny o boku 1 wpisano trójkąt równoboczny, tak że jego wierzchołki pokryły się ze środkami boków pierwotnego trójkąta. W ten zaś wpisano następny trójkąt równoboczny w ten sam sposób i tak w nieskończoność. Oblicz sumę pól wszystkich otrzymanych w ten sposób trójkątów.
83. [4p] Wyznacz iloraz nieskończonego, zbieżnego ciągu geometrycznego, w którym pierwszy wyraz jest równy 6, zaś suma wszystkich wyrazów ciągu jest równa $\frac{1}{8}$ sumy ich kwadratów.
84. [4p] W skarbcu królewskim było k monet. Pierwszego dnia rano skarbnik dorzucił 25 monet, a każdego następnego ranka dorzucał o 2 monety więcej niż dnia poprzedniego. Jednocześnie ze skarbcia król zabierał w południe każdego dnia 50 monet. Oblicz najmniejszą liczbę k , dla której w każdym dniu w skarbcu była co najmniej jedna moneta, a następnie dla tej wartości k oblicz, w którym dniu w skarbcu była najmniejsza liczba monet.
85. [4p] Ciąg (a, b, c) jest geometryczny, a ciągi $(4a-4, 2b-2, c-1)$ i $(a+5, b+3, c-15)$ są arytmetyczne. Oblicz a, b, c .
86. [4p] Rozwiąż równanie $2\sin^2 3x + \sin^2 6x = 2$ na przedziale $[0; 2\pi]$.
87. [4p] Rozwiąż równanie $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$, dla $x \in [0; 2\pi]$.
88. [4p] Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ suma kwadratów pierwiastków równania

$$x^2 + (m-3)x + m - 5 = 0$$

jest najmniejsza?

89. [4p] Sporządź wykres funkcji

$$f(x) = \left| \frac{2x}{x-2} \right|.$$

Omów ilość rozwiązań równania

$$f(x) = m + 2$$

w zależności od wartości parametru m .

90. [4p] Rozwiąż równanie $3\sin x \operatorname{tg} x = 2\sqrt{3}\sin x + 3\cos x$ w przedziale $[0, 2\pi]$.
91. [6p] Ciąg $(x-3, x+3, 6x+2, \dots)$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Oblicz iloraz tego ciągu i uzasadnij, że $\frac{S_{19}}{S_{20}} < \frac{1}{4}$, gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

04.12.2024r

92. [5p] O funkcji g wiadomo, że $g(x)+g^2(x)+g^3(x)+\dots=x$, gdzie lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego zbieżnego. Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ równanie $|g(x)| = m$ posiada dwa rozwiązania?
93. [4p] Rozwiąż nierówność $\sqrt{(x^2 - |x| - 2)^2} > 2$.
94. [4p] Wyznacz ciąg geometryczny, w którym suma trzech pierwszych wyrazów wynosi $\frac{7}{2}$, zaś suma ich kwadratów wynosi 5,25.
95. [4p] Wykaż, że jest dokładnie osiem liczb całkowitych k dla których wyrażenie $\frac{3k-1}{k+3}$ przyjmuje wartość całkowitą.
96. [3p] Wykaż tożsamość $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$.
97. [5p] Wyznaczyc wzór na sumę $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}$.
98. [4p] Udowodnić równość $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$.
99. [5p] Rozwiąż równanie $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.
100. [5p] Dla jakich wartości parametru m rozwiązania równania $x^2 + \frac{1}{m}x + m^2 = 0$ można przedstawić w postaci $x_1 = \sin \alpha, x_2 = \cos \alpha$ dla pewnego kąta $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$?
101. [5 pkt] Ciąg (a, b, c) jest geometryczny i $a+b+c=26$, zaś ciąg $(a-5, b-4, c-11)$ jest arytmetyczny. Oblicz a, b, c .
102. [4p] Wykaż, że ciąg (a_n) , którego suma n początkowych wyrazów wyraża się wzorem

$$S_n = 3n^2 + 2n + 1,$$

nie jest ciągiem arytmetycznym.

103. [3p] Wykaż, że jeśli $\cos(\alpha + \beta) = 0$ to $\sin(\alpha + 2\beta) = \sin \alpha$.
104. [5p] Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 7, a suma S wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 8. Wyznacz wszystkie wartości n , dla których spełniona jest nierówność

$$\left| \frac{S - S_n}{S_n} \right| < 0,001$$

gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

105. [4p] Reszty z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x-1)$, $(x+1)$, $(x+2)$, są odpowiednio równe 1, -1, 2. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$.
106. [4p] Omów ilość rozwiązań równania $\frac{|x-1|}{x^2-1} = 3m-1$ ze względu na wartość parametru m .

11.12.2024r

107. [4p] Wykaż że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 5 > 0$$

108. [4p] Wykaż, że jeśli n jest liczbą naturalną nieparzystą, to wyrażenie $\frac{n^6 - n^4 + n^3 - n}{n^2 - n + 1}$ jest liczbą podzielną przez 48.

109. [2p] Udowodnij, że suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x) = (x^2 - 3x + 4)^5 + (x - 5)^2 + 2$ jest liczbą podzielną przez 25.

110. [3p] Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b, a \neq c, b \neq c$ i $a + b = 2c$, to $\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$.

111. [4p] W sposób losowy rozdzielamy 9 różnych pluszowych zabawek 7 dzieciom. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każde dziecko dostanie co najmniej jedną zabawkę.

112. [4p] Suma trzech początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego wynosi 6, a suma S wszystkich wyrazów tego ciągu równa się $\frac{16}{3}$. Dla jakich naturalnych n spełniona jest nierówność $|S - S_n| < \frac{1}{96}$?

113. [4p] Rozwiąż równanie $\cos x = (\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})(1 - \sin \frac{x}{2})$.

114. [4p] Rozwiąż nierówność $\frac{3}{|x+1|-1} \geq |x|$

115. [3p] Pociąg miał przebyć pewną drogę w czasie 21 godzin. Niestety w połowie drogi zatrzymał się na 30 minut. Aby dotrzeć na miejsce punktualnie, musieli zwiększyć prędkość o 2 *km/godz.* Jaka była planowana prędkość pociągu? Jaka była długość trasy, jeśli prędkość pociągu na poszczególnych odcinkach była stała?

116. [4p] Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ pierwiastki x_1, x_2 równania

$$(m - 3)x^2 + 2mx + \frac{1}{2}m - 1 = 0$$

spełniają warunek $x_1 + x_2 + mx_1x_2 > 0$?

117. [3p] Oblicz ile jest wszystkich liczb naturalnych siedmiocyfrowych, w zapisie których występują dokładnie dwie cyfry 8, dwie cyfry 5, nie występuje zero, oraz suma wszystkich cyfr równa jest 33.

118. [4p] W ciągu arytmetycznym dane są $a_1 = 1, n = 9, S_n = 369$. W ciągu geometrycznym zawierającym również 9 wyrazów wyraz pierwszy i ostatni są identyczne jak w ciągu arytmetycznym. Znajdź siódmy wyraz ciągu geometrycznego.