

Maturalna otwarta pracownia

25.09.2024r

Przekształcenia wykresów funkcji

Symetria względem Ox

1. Naszkicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1 , oraz f_2 , jeśli:

1.1. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -x^2$

1.2. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = -\sqrt{x}$

1.3. $f_1(x) = \frac{4}{x}$, $f_2(x) = -\frac{4}{x}$

1.4. $f_1(x) = 2x - 4$, $f_2(x) = -2x + 4$

1.5. $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = -x^3$

1.6. $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = -|x|$

1.7. $f_1(x) = x - 3$, $f_2(x) = 3 - x$

1.8. $f_1(x) = [x]$, $f_2(x) = -[x]$

1.9. $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = -2^x$

1.10. $f_1(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $f_2(x) = -\left(\frac{1}{4}\right)^x$

1.11. $f_1(x) = \log_2 x$, $f_2(x) = -\log_2 x$

1.12. $f_1(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $f_2(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x$

Symetria względem Oy

2. Naszkicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1 , oraz f_2 , jeśli:

2.1. $f_1(x) = x - 2$, $f_2(x) = -x - 2$

2.2. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (-x)^2$

2.3. $f_1(x) = \frac{4}{x}$, $f_2(x) = -\frac{4}{x}$

2.4. $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = (-x)^3$

2.5. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{-x}$

2.6. $f_1(x) = 2x + 4$, $f_2(x) = -2x + 4$

2.7. $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = |-x|$

2.8. $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = 2(-x)$

2.9. $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{-x}$

2.10. $f_1(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $f_2(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$

2.11. $f_1(x) = \log_2 x$, $f_2(x) = \log_2(-x)$

2.12. $f_1(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $f_2(x) = \log_{\frac{1}{3}} -x$

Translacja o wektor

3. Wykres funkcji f_2 powstaje poprzez translację o wektor \vec{u} wykresu funkcji f_1 . Zapisz wzór funkcji f_2 , następnie naszkicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1 , oraz f_2 , jeśli:

3.1. $f_1(x) = x^2$, $\vec{u} = [4, -1]$

3.2. $f_1(x) = x^2$, $\vec{u} = [2, -4]$

3.3. $f_1(x) = 2x$, $\vec{u} = [2, 4]$

3.4. $f_1(x) = 2x$, $\vec{u} = [1, -2]$

3.5. $f_1(x) = \frac{2}{x}$, $\vec{u} = [-1, -2]$

3.6. $f_1(x) = \frac{4}{x}$, $\vec{u} = [2, 3]$

3.7. $f_1(x) = 2^x$, $\vec{u} = [-1, -2]$

3.8. $f_1(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $\vec{u} = [2, -3]$

4. Wykres funkcji f_2 powstaje poprzez translację o wektor \vec{u} wykresu funkcji f_1 . Zapisz współrzędne wektora \vec{u} , następnie naszkicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1 , oraz f_2 , jeśli:

- 4.1. $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = 2x - 4$ 4.5. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{x-4} - 2$
 4.2. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (x-1)^2 - 4$ 4.6. $f_1(x) = \sqrt{2x}$, $f_2(x) = \sqrt{2x+4} - 1$
 4.3. $f_1(x) = \frac{4}{x}$, $f_2(x) = \frac{4}{x-1} + 2$ 4.7. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (x+3)^2 + 3$
 4.4. $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = (x+2)^3 + 1$ 4.8. $f_1(x) = \frac{2}{x}$, $f_2(x) = \frac{2}{x+1} - 4$

Symetria częściowa Ox

5. Naskicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1 , oraz f_2 , jeśli:

- 5.1. $f_1(x) = x^2 - 4$, $f_2(x) = |x^2 - 4|$ 5.5. $f_1(x) = 2^{x+3} - 4$, $f_2(x) = |2^{x+3} - 4|$
 5.2. $f_1(x) = 2x - 4$, $f_2(x) = |2x - 4|$ 5.6. $f_1(x) = \log_2(x+4) + 2$, $f_2(x) = |\log_2(x+4) + 2|$
 5.3. $f_1(x) = \sqrt{x-2} - 2$, $f_2(x) = |\sqrt{x-2} - 2|$ 5.7. $f_1(x) = x^3 + 1$, $f_2(x) = |x^3 + 1|$
 5.4. $f_1(x) = \frac{4}{x-2} + 2$, $f_2(x) = \left| \frac{4}{x-2} + 2 \right|$ 5.8. $f_1(x) = 3^x + 2$, $f_2(x) = |3^x + 2|$

Symetria częściowa Oy

6. Naskicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1 , oraz f_2 , jeśli:

- 6.1. $f_1(x) = 2x - 4$, $f_2(x) = 2|x| - 4$ 6.5. $f_1(x) = \sqrt{x-3} - 2$, $f_2(x) = \sqrt{|x|-3} - 2$
 6.2. $f_1(x) = \sqrt{x+2} + 1$, $f_2(x) = \sqrt{|x|+2} + 1$ 6.6. $f_1(x) = \log_2(x-1) - 2$, $f_2(x) = \log_2(|x|-1) - 2$
 6.3. $f_1(x) = \frac{3}{x+1} + 2$, $f_2(x) = \frac{3}{|x|+1} + 2$ 6.7. $f_1(x) = x^3 - 1$, $f_2(x) = |x|^3 - 1$
 6.4. $f_1(x) = 4^{x-1} - 2$, $f_2(x) = 4^{|x|-1} - 2$ 6.8. $f_1(x) = \frac{-2}{x-2} - 2$, $f_2(x) = \frac{-2}{|x|-2} - 2$

Powinowactwo prostokątne o osi Ox

7. Naskicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1 , oraz f_2 , jeśli:

- 7.1. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = 2\sqrt{x}$ 7.5. $f_1(x) = 2^{x-1} - 1$, $f_2(x) = 2(2^{x-1} - 1)$
 7.2. $f_1(x) = x - 2$, $f_2(x) = -2(x - 2)$ 7.6. $f_1(x) = x - 3$, $f_2(x) = 6 - 2x$
 7.3. $f_1(x) = \frac{1}{x-2} + 1$, $f_2(x) = \frac{2}{x-2} + 2$ 7.7. $f_1(x) = |x-1| - 1$, $f_2(x) = 2|x-1| - 2$
 7.4. $f_1(x) = x^2 - 1$, $f_2(x) = -2(x^2 - 1)$ 7.8. $f_1(x) = \sqrt{x-2} - 2$, $f_2(x) = -2\sqrt{x-2} + 4$

Powinowactwo prostokątne o osi Oy

8. Naskicuj na jednym rysunku wykresy funkcji f_1 , oraz f_2 , jeśli:

- 8.1. $f_1(x) = x - 2$, $f_2(x) = 2x - 4$ 8.5. $f_1(x) = x^2 - 4$, $f_2(x) = 4x^2 - 4$
 8.2. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{2x}$ 8.6. $f_1(x) = 2^{x-2} - 2$, $f_2(x) = 2^{2x-2} - 2$
 8.3. $f_1(x) = x - 3$, $f_2(x) = -3x - 3$ 8.7. $f_1(x) = \sqrt{x+4} - 2$, $f_2(x) = \sqrt{-2x+4} - 2$
 8.4. $f_1(x) = \frac{3}{x} - 1$, $f_2(x) = \frac{1}{x} - 1$ 8.8. $f_1(x) = (x-4)^2 - 9$, $f_2(x) = (2x-4)^2 - 9$

Złożenie przekształceń

9. Wykres funkcji f_2 powstał w wyniku przekształceń wykresu funkcji f_1 . Zapisz ciąg przekształceń, sporządź szkic funkcji f_2 jeśli:

9.1. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = |x+2| - 1$

9.2. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -(x-2)^2 + 4$

9.3. $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \left| \frac{2}{x+2} - 2 \right|$

9.4. $f_1(x) = 3^x$, $f_2(x) = 3^{x-2} - 3$

9.5. $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = -2^{1-x} + 1$

9.6. $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = |2^{x-3} - 4|$

9.7. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = |\sqrt{x-2} - 4|$

9.8. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = |(|x|+3)^2 - 1|$

9.9. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = |2 - |x-4||$

9.10. $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{|x-2|} + 1$

9.11. $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \left| \frac{2}{1-|x-2|} - 3 \right|$

9.12. $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \frac{3}{1-|x+2|} + 3$

9.13. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \left| -\sqrt{2-|x|} + 3 \right|$

9.14. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = |1 - \sqrt{-x}|$

9.15. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{|2x-3|} - 2$

9.16. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (|x|-3)^2 - 2$

9.17. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{|x|-1}$

9.18. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = |4 - 2(x-1)^2| - 3$

9.19. $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \frac{2}{|x|-1}$

9.20. $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \left| \frac{1}{x-1} - 2 \right|$

02.10.2024r

1. Rozwiąż nierówność $|x^2 - 5x - 6| + |x - 6| \geq 2|12 - 2x|$.
2. Rozwiąż nierówność $|2x^2 + 7x - 11| < x^2 + x + 3$
3. Rozwiąż nierówność $\sqrt{(x^2 - |x| - 2)^2} > 2$.
4. Wykaż, że dla $x > 0$ prawdziwa jest nierówność $20x^2 + 2x + 5 \geq 22x$.
5. Wykaż, że liczba $\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ jest całkowita.
6. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ liczba $x = 5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ jest podzielna przez 19.
7. Wykaż, za pomocą indukcji matematycznej, równość

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

8. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^3 + 5n$ jest podzielna przez 6.
9. Wykaż, że dla dowolnej liczby pierwszej $p, p > 5$ liczba $p^2 + 11$ jest podzielna przez 12.
10. Dla jakich wartości parametru $m, m \in \mathbb{R}$ równanie $x^2 - |2x - 8| = m$ ma dwa pierwiastki różnych znaków?

09.10.2024r

11. Wyznacz wszystkie wartości parametru $m, m \in \mathbb{R}$, dla których funkcja

$$f(x) = (m^2 - 9)x^2 - 2(m - 3)x - 3$$

przyjmuje wartości ujemne dla każdej liczby rzeczywistej x .

12. Wyznacz wszystkie wartości parametru $m, m \in \mathbb{R}$, dla których funkcja

$$f(x) = x^2 + (2m + 3)x + m^2 + 3m$$

będzie miała dwa różne miejsca zerowe, z których jedno będzie mniejsze od 2, zaś drugie większe od $\frac{7}{3}$.

13. Ustal, dla jakich wartości parametru $m, m \in \mathbb{R}$ równanie $x^2 + 2(m + 1)x + m + 2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 takie, że $|x_1| + |x_2| < 2\sqrt{11}$.

14. Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ dla których zbiór rozwiązań nierówności

$$|x^2 - 4x + 3| \leq x - m$$

jest jednoelementowy.

15. Wyznacz wszystkie wartości rzeczywistego parametru m , dla których zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x - m^2 - 2m + 1}{m^2 - 2 - x} > 0$ jest przedział $(2; 7)$.

16. Dla jakich wartości parametru m równanie $2x^2 - (m - 1)x + m + 1 = 0$ ma różne pierwiastki rzeczywiste spełniające warunek $|x_2 - x_1| = 1$?

17. Rozwiąż równanie $\sqrt{x + 3} - 4\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 8} - 6\sqrt{x - 1} = 1$.

18. Rozwiąż nierówność $|x - 2| - |x - 1| \leq |x + 1| - 5$

19. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n , liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

20. Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ rozwiązanie (x, y) układu równań

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + my = 2m \end{cases}$$

należy do I ćwiartki układu współrzędnych?

16.10.2024r

21. Dane jest równanie $(2m-1)x^2-2x+m=0$, gdzie $m \in \mathbb{R}$. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste których suma odwrotności jest równa $\frac{2}{3}m$?
22. Rozwiąż nierówność $|2x+2|+|x-2|>5$.
23. Ustal, dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ dwa różne pierwiastki x_1, x_2 równania

$$x^2 - 4(m+1)x + 2m^2 - 2m = 0$$

spełniają warunek $x_1 < m < x_2$.

24. Wykaż, że dla dowolnej liczby $m \in \mathbb{Z}$, wartość wyrażenia $m^6 - 2m^4 + m^2$ jest liczbą podzielną przez 36.
25. Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 19$ jest podzielne przez 16.
26. Znaleźć maksimum funkcji $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji f .
27. Udowodnij, że wielomian $W(x) = x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 2$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.
28. Wyznacz wartość parametrów a, b tak, aby wielomian $x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + b$ był podzielny przez $x^2 - 1$. Dla wyznaczonych wartości parametrów oblicz wszystkie pierwiastki tego wielomianu.
29. Wykresy funkcji kwadratowych $f(x) = 3x^2 - 2mx - m$, oraz $g(x) = mx^2 + x + 3$, dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ przecinają się w dwóch punktach. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których iloczyn sumy odciętych tych punktów przez ich iloczyn jest o $\frac{1}{8}$ mniejszy od największej wartości funkcji g .
30. Wykaż, że jeśli $mp = 2(n+q)$ to chociaż jedno z równań $x^2 + mx + n = 0$, $x^2 + px + q = 0$ ma rozwiązanie.

23.10.2024r

31. [4 pkt] Rozwiąż nierówność $|2x - 5| - |x + 4| \leq 2 - 2x$.
32. [3 pkt] Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których równanie

$$|x - 4| = (a - 1)^2 - 5$$

ma dwa rozwiązania różnych znaków.

33. [4 pkt] Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których jedynym rozwiązaniem rzeczywistym równania $x^3 + m^3x^2 - m^2x - 1 = 0$ jest liczba 1.
34. [5 pkt] Pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 2x^3 - (3m - 1)x^2 + 7x - m$ jest liczba -1 . Wyznacz wartość parametru m oraz pozostałe pierwiastki tego wielomianu. Rozwiąż nierówność $W(x) < 0$.
35. [3 pkt] Przedstaw wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych i takich, że współczynniki przy drugich potęgach są równe jeden.
36. [4 pkt] Reszta z dzielenia wielomianu

$$W(x) = 4x^3 - 6x^2 - (5m + 1)x - 2m$$

przez dwumian $x + 2$ jest równa (-30) . Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$.

37. [5 pkt] Sporządź wykres funkcji $f(x) = |x^2 - 2x - 8|$, a następnie korzystając z tego wykresu, wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których równanie $f(x) = k$, ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą ujemną.
38. [3 pkt] Rozwiąż nierówność:

$$\frac{2x + 1}{-x} \leq \frac{4 + 2x}{5x + 5}.$$

39. [4 pkt] Wyznacz całkowite wartości parametru a , dla których równanie

$$(a - 1)x^2 - (a^2 + 1)x + a^2 + a = 0$$

ma pierwiastki całkowite.

40. [4 pkt] Dla jakich całkowitych wartości parametrów a, b liczba $1 + \sqrt{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu $3x^3 + ax^2 + bx + 12$.
41. [3 pkt] Wykaż, że kwadrat liczby niepodzielnej przez 3 daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3.
42. [3 pkt] Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k i każdej liczby całkowitej m liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 6.
43. Liczby x_1 oraz x_2 są różnymi pierwiastkami równania kwadratowego $(m - 2)x^2 - 2x + 1 = 0$. Narysuj wykres funkcji $f(m) = |x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2|$.

30.10.2024r

44. [3 pkt] Ustal dla jakich wartości całkowitych liczby x , wyrażenie $\frac{x^3-2x+6}{x-2}$ osiąga wartość całkowitą.
45. [4 pkt] Dla jakich wartości parametru m liczba 1 zawiera się między różnymi pierwiastkami równania $(m-5)x^2-4mx+m-2=0$?
46. [5 pkt] Wyznacz wszystkie liczby $m \in \mathbb{R}$, dla których równanie $x^2+mx+(2m+1)=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2 takie, że $x_1^3+x_2^3=26$.
47. [4 pkt] Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^3+(m-1)x-m=0$$

- ma dokładnie dwa pierwiastki rzeczywiste. Dla otrzymanych wartości m wyznacz te pierwiastki.
48. [4 pkt] Dla jakich wartości parametru m równanie $mx^2+2x+m-2=0$ ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 1?
49. [5 pkt] Sporządź wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{x-4}{x-2} \right|$, a następnie korzystając z tego wykresu, wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których równanie $\left| \frac{x-4}{x-2} \right| = k$, ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą ujemną.
50. [4 pkt] Rozwiąż nierówność

$$\frac{2x-7}{5-2x} \leq \frac{3-x}{2x+1}$$

51. [4 pkt] Wykaż, że równanie $2x^3-3x^2-5=0$ ma w przedziale (2;3) dokładnie jedno rozwiązanie.
52. [4 pkt] Rozwiąż nierówność $|x-|4-x|| \leq 5$.
53. [5 pkt] Wykaż, bez użycia kalkulatora i tablic, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą.
54. [3 pkt] Udowodnij, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 36.
55. [3 pkt] Wykaż, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ to $x^4+y^4+x^2+y^2 \geq 2(x^3+y^3)$
56. [4 pkt] Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k i każdej liczby całkowitej m liczba

$$k^5m - km^5$$

- jest podzielna przez 10.
57. [3 pkt] Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x-1)$ otrzymano resztę -3 , przy dzieleniu przez dwumian $(x-2)$ resztę 6, zaś przy dzieleniu przez dwumian $(x+3)$ resztę 1. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = x^3-7x+6$.