Rozdział 1 Dowody algebraiczne

1.1 26.10.2020r

1. Udowodnij, że dla dowolnych, dodatnich liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.
2. Wykaż, że nierówność $\sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ jest spełniona przez wszystkie rzeczywiste, dodatnie liczby x, y.
3. Udowodnij, że jeśli $x \in \mathbb{R}_+$ to $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

1.2 27.10.2020r

4. Wykaż, że dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$.
5. Udowodnij, że jeśli $x \in \mathbb{R}_-$ to $x + \frac{1}{x} \leq -2$.
6. Pokaż, że dla dowolnych, dodatnich liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność $(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2$.

1.3 28.10.2020r

7. Wykaż, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}_+$ to $(x+y)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) \geq 4$.
8. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich rzeczywistych x, y, z zachodzi $(x+y+z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) > 8$.
9. Uzasadnij, ze dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, spełniających równość $x^2 + y^2 = 2$ prawdziwa jest nierówność $x + y \leq 2$.

1.4 29.10.2020r

10. Wykaż, że jeśli $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, oraz $x + y + z = 48$ to $\sqrt[3]{xyz} \leq 16$.
11. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich, rzeczywistych liczb x, y, z zachodzi $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$.
12. Udowodnij, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}_+$, oraz $xy = 49$ to $(x+1)(y+1) \geq 64$.

1.5 30.10.2020r

13. Udowodnij, że dla dowolnych rzeczywistych, dodatnich liczb x, y, z zachodzi nierówność $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y} \geq x+y+z$.
14. Wykaż, że jeśli $x \in \mathbb{R}_+$ to $x^3+\frac{3}{x} \geq 4$.
15. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi $\frac{x^2}{x^4+1} \leq \frac{1}{2}$.

1.6 02.11.2020r

16. Wykaż, że dla $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ zachodzi $x+y+z \geq \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$.
17. Pokaż, że jeśli $x, y > 0 \wedge xy = 1$ to $(x+1)(y+1) \geq 4$.
18. Udowodnij, że dla dowolnych rzeczywistych, dodatnich liczb x, y, z, w prawdziwa jest nierówność $(x+y)(z+w) \geq 4\sqrt{xyzw}$.

1.7 03.11.2020r

19. Wykaż, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}_+$ to $x(x+1)+y(y+1) > 2xy$.
20. Pokaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z, jeśli $x+y+z=a$ to $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{a^2}{3}$.
21. Udowodnij, że dla liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $x > 1$, prawdziwa jest nierówność $\frac{x^4+x^2+1}{2} \geq \frac{x^3-1}{x^2-1}$.

1.8 04.11.2020r

22. Pokaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi $x^2y^2+2x^2+2y^2-8xy+4 \geq 0$.
23. Udowodnij, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ to $5x^2+y^2-4xy+6x+9 \geq 0$.
24. Udowodnij, że nierówność $x^4+y^4+x^2+y^2 \geq 2(x^3+y^3)$ jest spełniona przez dowolną parę liczb rzeczywistych x, y.

1.9 05.11.2020r

25. Wykaż, że dla liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z, w prawdziwa jest nierówność $\frac{x^2}{y}+\frac{z^2}{w} \geq \frac{(x+z)^2}{yw}$.
26. Wykaż, że jeśli $x, y \in \mathbb{R} \wedge xy \neq 0$ to $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2} \geq \frac{1}{3}$.

27. Udowodnij, że wielomian $W(x) = x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

1.10 06.11.2020r

28. Pokaż, że dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność $x^4 + 51 \geq 42x - 13x^2 + 2x^3$.
29. Pokaż, że nierówność $x^2y^2 - 7xy + x^2 + y^2 + 16 \geq 0$, jest spełniona przez każdą parę liczb rzeczywistych x, y o jednakowych znakach.
30. Pokaż, że jeśli $x, y \in \mathbb{R} \wedge x + y > 0$ to $x^3 + y^3 \geq xy^2 + x^2y$.

1.11 01.12.2020r

31. Wykaż, że reszta z dzielenia $41^{83} - 17^{34}$ przez 10 wynosi 2.
32. Wykaż, że jeśli liczba $a \in \mathbb{C}$ daje resztę 4 przy dzieleniu przez 5 to liczba $a^3 + 1$ dzieli się przez 5.
33. Wykaż, że dowolna liczba całkowita niepodzielna przez 3 po podniesieniu do kwadratu daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3.

1.12 02.12.2020r

34. Wykaż, że jeśli dla liczba naturalnych x, y, z zachodzi $x^2 + y^2 = z^2$ to co najmniej jedna z liczb x, y, z dzieli się przez 3.
35. Wykaż, że dla dowolnych liczb całkowitych m, k wyrażenie $k^3m - km^3$ dzieli się przez 6.
36. Wykaż, że jeśli dla $x, y, z \in \mathbb{C}$ zachodzi $3 \mid x + y + z$ to również $3 \mid x^3 + y^3 + z^3$.

1.13 03.12.2020r

37. Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej k wyrażenie $k(k + 1)(k + 9)(k^2 + 1)$ dzieli się przez 5.
38. Wykaż, że jeśli liczba naturalna n nie dzieli się przez 7 to $n^6 - 1$ dzieli się przez 7.
39. Wykaż, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ wyrażenie $n^5 - n$ dzieli się przez 5.

1.14 04.12.2020r

40. Wykaż, że dla każdej liczby $m \in \mathbb{C}$ wyrażenie $m^6 - 2m^4 + m^2$ dzieli się przez 36.
41. Wykaż, że dla dowolnej liczby $m \in \mathbb{C}$ wyrażenie $(m+2)^4 - m^4$ dzieli się przez 8.
42. Wykaż, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ to wyrażenie $4^{n+2} - 4^n$ dzieli się przez 60.

1.15 07.12.2020r

43. Wykaż, że dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{C}$ wyrażenie $x^5 - 5x^3 + 4x - 30$ dzieli się przez 30.
44. Wykaż, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ to $10 \mid 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$
45. Wykaż, że jeśli p - liczba pierwsza, taka że $p \geq 5$ to $p^2 - 17$ dzieli się przez 8.

1.16 08.12.2020r

46. Wykaż, że jeśli p - liczba pierwsza, taka że $p \geq 5$ to $24 \mid p^2 - 73$.
47. Wykaż, że jeśli p - liczba pierwsza, taka że $p^2 - 1$ nie dzieli się przez 4, to musi zachodzić $p = 3$.

1.17 11.12.2020r

48. Wykaż, że dla dowolnych liczb całkowitych k, m liczba $k^5m - km^5$ jest podzielna przez 10.
49. Rozpatrujemy liczby całkowite x, y. Wykaż, że jeśli x^3 dzieli się przez $x + y$, to y^3 również dzieli się przez $x + y$.

1.18 14.12.2020r

50. Wykaż, że liczba postaci $n^3 + 2n$ jest podzielna przez 3 dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$.
51. Wykaż, że liczba $3^{4n+2} + 1$ jest podzielna przez 10, dla każdej liczby naturalnej n.

1.19 15.12.2020r

52. Udowodnij, że jeżeli liczba całkowita n nie jest podzielna przez 3, to wyrażenie $n^4 - 17n^2 + 7$ jest podzielne przez 9.
53. Rozważamy ciąg arytmetyczny (a_n), w którym $a_1 = 1$ $r = 1$. Wykaż, że iloczyn każdych 10 kolejnych wyrazów tego ciągu jest liczbą podzielną przez 2^8.

1.20 16.12.2020r

54. Wykaż, że jeśli $a + \frac{1}{a}$ jest liczbą całkowitą, to $a^4 + \frac{1}{a^4}$ również jest liczbą całkowitą.
55. Wykaż, że suma kwadratów trzech liczb niepodzielnych przez 3 jest liczbą podzielną przez 3.

1.21 17.12.2020r

56. Wykaż, że jeśli n jest liczbą naturalną nieparzystą, to wyrażenie $\frac{n^6-n^4+n^3-n}{n^2-n+1}$ jest liczbą podzielną przez 48.
57. Wykaż, że jeśli p jest liczbą pierwszą, taką że $p > 5$, to liczba $p^2 - 49$ jest podzielna przez 12.

1.22 18.12.2020r

58. Ustal dla jakich wartości całkowitych liczby x, wyrażenie $\frac{x^3-2x+6}{x-2}$ osiąga wartość całkowitą.
59. Wykaż, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych jest liczbą podzielną przez 9.